

DOI: 10.16285/j.rsm.2015.03.014

基于多重分形特征的岩体结构面剪切强度研究

陈世江^{1,2}, 朱万成¹, 于庆磊¹, 王青元¹

(1. 东北大学 深部金属矿山安全开采教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819; 2. 内蒙古科技大学 矿业研究院, 内蒙古 包头 014010)

摘 要: Barton 剪切强度模型是目前工程实践中普遍采用的强度公式, 而实际应用时, 该模型中结构面粗糙性系数 (JRC) 的评估存在主观性和片面性的缺点。鉴于此, 应用多重分形理论, 提出了采用多重分形参数准确量化 JRC 的方法。首先应用数字图像处理技术获取了结构面三维形貌数据信息; 然后采用投影覆盖法进行了结构面的分形维数计算, 重点对结构面的多重分形特征进行了分析, 通过对比分析了构造的 15 个结构面的多重分形特征值。结果表明: 结构面越粗糙, 多重分形特征参数 $\Delta D(q)$ 和 $\Delta a(q)$ 值越大, $\Delta D(q)$ 或 $\Delta a(q)$ 能够很好地描述结构面的形貌特征。最后对 9 组石膏试件进行了剪切试验, 通过不同正应力下对应的剪应力数据分析, 结合结构面形貌多重分形参数 $\Delta D(q)$ 或 $\Delta a(q)$, 以 Barton 剪切强度公式为基础, 应用最小二乘法原理, 给出了 JRC 与 $\Delta D(q)$ 及 JRC 与 $\Delta a(q)$ 关系。这样在工程实际中, 可以用参数 $\Delta D(q)$ 或 $\Delta a(q)$ 对 JRC 进行估算, 克服了 JRC 人为估值主观性及采用二维标准轮廓线评估片面性的缺点, 为准确评估结构面粗糙度提供了一条新的途径。在此基础上, 应用 Barton 模型可准确估算岩体结构面的剪切强度。

关 键 词: 结构面; 剪切强度; 多重分形; 数字图像处理技术

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2015) 03-703-09

Shear strength research on rock joint surfaces based on multifractal theory

CHEN Shi-jiang^{1,2}, ZHU Wan-cheng¹, YU Qing-lei¹, WANG Qing-yuan¹

(1. Key Laboratory of Ministry of Education on Safe Mining of Deep Metal Mines, Northeastern University, Shenyang, Liaoning 110819, China;

2. Institute of Mining Engineering, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou, Inner Mongolia 014010, China)

Abstract: The Barton's shear strength criterion is widely used in engineering practice. However, the estimation of joint surface roughness coefficient (JRC) is subjective and one-sided in this method. Therefore, a method is proposed to estimate JRC with multifractal parameters based on multifractal theory. Firstly, 3D data of joint surface are obtained with digital image processing (DIP) technique. Secondly, the fractal dimension of surface is calculated with the projective covering method (PCM). Particularly the multifractal parameters of fifteen joint surfaces are computed. The results show that the rougher the surface, the larger the parameters of $\Delta D(q)$ and $\Delta a(q)$. Both multifractal parameters $\Delta D(q)$ and $\Delta a(q)$ can well describe the morphology of joint surface. At last, nine groups of gypsum specimens are used for direct shear tests under different normal stresses. The relationship between the multifractal parameters and the JRC is examined with the principle of least square method according to the experimental data of shear strength. Thus, the JRC can be estimated accurately using parameters of $\Delta D(q)$ and $\Delta a(q)$. The results provide a new approach to study surface roughness of rock joints. On the basis, the shear strength of rock joints can be accurately estimated.

Keywords: joint surface; shear strength; multifractal; digital image processing (DIP) technique

1 引 言

岩体结构面剪切强度研究一直是岩石力学界探讨的热点课题。到目前为止, 已提出较有影响的剪

切强度模型不下十余种。典型的如 Patton^[1]双线性强度模型, Jaeger^[2]剪断效应模型, Ladanyi 和 Archambault^[3]剪胀、剪断效应模型, Barton 和 Choubey^[4]JRC-JCS 剪切强度模型, 考虑三维效应的

收稿日期: 2014-09-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.51222401, No.51374049, No.51304037); 教育部科学技术研究重点项目 (No.113019A); 中央高校基本科研业务费资助 (No.N110201001, No.N120101001); 中国-南非联合研究计划项目 (No.2012DFG71060/CS06-L01); 教育部博士点基金资助课题 (No.20110042110035); 内蒙古教育厅基金项目 (No.NJZY13138)。

第一作者简介: 陈世江, 男, 1979 年生, 博士研究生, 讲师, 主要从事采矿工程与岩石力学方面的教学与研究工作。E-mail: chenshijiang_2003@163.com
通讯作者: 朱万成, 男, 1974 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事采矿工程与岩石力学方面的教学与研究工作。E-mail: zhuwancheng@mail.neu.edu.cn

Grasselli^[5]模型,夏才初等^[6]改进的 Grasselli 模型等。在所有的强度公式中,Barton^[4]强度公式因其形式简单且能够反映节理面的粗糙度,是目前工程实践中应用最为广泛的强度公式。但公式中参数 JRC 的确定存在人为估计的主观性;另外,在实践中采用二维节理轮廓线进行估值是片面的。因此,国内外学者在节理二维轮廓线及三维结构面 JRC 的量化表征方面做了大量的研究工作。如 Tse 等^[7]建立了轮廓起伏高度一阶导数均方根 Z_2 及结构函数 SF 与 JRC 之间的经验关系。夏才初等^[8]应用数理统计的方法建立粗糙度剖面曲线幅值、波长、倾角以及坡度等参数与 JRC 之间的关系。EL-Soudani^[9]提出了用 R_p (迹线长度与其直线长度的比值) 表示物体表面线粗糙度;Maerz^[10]将 10 条标准轮廓线进行了数字化,并计算了每条节理轮廓线的 R_p 值,给出了 JRC 与 R_p 的关系。考虑结构面的三维特性,Grasselli^[11]提出了用参数 $\theta_{\max}^*/C$ ($\theta_{\max}^*$ 为最大剪切方向倾角, C 为节理表面粗糙度参数) 描述结构面的粗糙度;Tatone^[12]进一步对参数 $\theta_{\max}^*/C$ 进行了研究,认为用参数 $\theta_{\max}^*/(C+1)$ 表征结构面的粗糙度更具有明确的物理意义。上述研究对结构面形貌特征的量化描述做出了很大贡献,然而用参数 Z_2 、 SF 、 R_p 表征 JRC 时仍局限于二维节理轮廓线的描述;而参数 $\theta_{\max}^*/(C+1)$ 仅考虑了结构面上凸凹体间的倾角,而没有考虑其幅值。

自 Mandelbrot^[13]创立分形几何以来,众多学者应用分形维数描述了节理粗糙度。Lee 等^[14]用分形维数描述了节理轮廓线的粗糙度,给出了 JRC 与分形维数的二次函数关系;谢和平^[15]通过研究节理轮廓线的分形特征,给出了 JRC 与分形维数的幂函数关系;Seidel 等^[16]从分形体“自相似”的角度出发,计算了 ISRM 节理标准轮廓线的分形维数,并建立了节理轮廓线分形维数与其统计参数(起伏角、长度)的关系;Yang 等^[17]考虑节理轮廓线具有“自仿射”的特征,计算了结构面轮廓线 Hurst 指数。考虑结构面的三维效应特征,孙辅庭等^[18]提出一种新的基于三维均方根抵抗角的节理面粗糙度分形描述方法;曹平等^[19]运用分形几何理论对节理表面三维形貌特征进行分析,得出节理剖面线的分形维数与 JRC 之间的函数表达式。然而,研究表明,岩体结构面具有多重分形特征^[20-21],三维结构面多重分形特征参数与 JRC 存在怎样的关系以及如何用该参数表征结构面剪切力学行为仍是值得研究的课题。

本文采用多重分形理论分析方法,准确量化了

结构面形貌特征。基于石膏试件剪切试验和 Barton 剪切强度模型,分析了结构面多重分形特征参数与剪切强度的关系,给出了 JRC 与 $\Delta D(q)$ 及 JRC 与 $\Delta a(q)$ 关系,为准确评估 JRC 提供了一种新方法。

2 结构面形貌数据的获取

在实验室用石膏制备尺寸大小为 50 mm×50 mm×100 mm 的石膏试件,在直剪试验机上剪断后形成如图 1 所示的粗糙结构面。经实际量测,该结构面最高点与最低点落差为 9 mm。用高清数码相机正对着断面拍照,从而获取结构面粗糙度信息,如图 2 所示,该数字图像尺寸大小为 1 025 像素×1 025 像素。图 2 较好地反映了结构面的实际情况。应用 VC++ 编制图像处理程序,经数字图像处理后,获得该结构面的灰度图。这里用图像信息中的灰度值来表示结构面的起伏高度,暗色表示凹下去的部位,亮色表示突起的部分;数值上在 0~255 之间变化,0 表示最暗,255 表示最亮。用灰度值表示结构面起伏高度的缺点是:不同的结构面,不论其起伏程度多大,灰度值的范围不变。为了使图像中每一点的灰度值能够近似表示实际高度,参照试件实际尺寸对灰度值进行相应比例的缩放,缩放比例系数按照式(1)进行计算。

$$\frac{L_{\text{image}}}{L} = k \frac{h_{h\max} - h_{h\min}}{h_{\max} - h_{\min}} \quad (1)$$

式中: L_{image} 为结构面图像长度(像素); L 为结构面实际长度(mm); $h_{h\max}$ 为图像中最大灰度值, $h_{h\min}$ 为图像中最小灰度值; $h_{\max}$ 为结构面内最高点(mm); $h_{\min}$ 为结构面内最低点(mm); k 为缩放比例系数。

经量测计算,该图像的缩放比例为 344/369。



图1 石膏试件

图2 断口形貌

Fig.1 Gypsum specimen Fig.2 Morphology of fracture

3 结构面分形维数计算与分析

3.1 结构面分形维数计算方法

根据分形理论,粗糙表面的面积 $A_r(\delta)$ 与测量尺度 δ 存在如下关系^[22-23]:

$$A_T(\delta) = A_{T0} \delta^{2-D} \quad (2)$$

式中： A_{T0} 为粗糙表面的直观面积； D 为粗糙表面的真实分形维数， $D \in [2, 3]$ 。

对式 (2) 两边取对数得

$$D = 2 - \frac{\ln\left(\frac{A_T(\delta)}{A_{T0}}\right)}{\ln(\delta)} = 2 - \beta \quad (3)$$

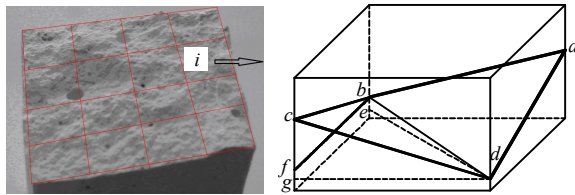
式中： β 为关于 $A_T(\delta)/A_{T0} - \delta$ 双对数曲线的斜率。

采用投影覆盖法^[23]，如图 3(a)所示，将结构面划分成 $\delta^{-1} \times \delta^{-1}$ ($\delta = 1/2, 1/4, 1/8$) 网格，每个小网格内结构面的实际面积可用两个三角形的面积和近似表示，如图 3(b)所示， $A_i(\delta) = S_{abd} + S_{bdc}$ 。小网格内三角形的面积可采用海伦公式进行计算。即已知三角形的边长分别为 a 、 b 、 c ，则三角形的面积为

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4)$$

式中： $p = (a+b+c)/2$ 。

例图 3(b)中 $S_{bcd} = \sqrt{p(p-bc)(p-cd)(p-db)}$ ，其中 $p = (bc+cd+db)/2$ ， $bc = \sqrt{bf^2 + cf^2}$ ， $cd = \sqrt{dg^2 + cg^2}$ ， $db = \sqrt{bf^2 + dg^2 + be^2}$ 。



(a) 网格划分示意图

(b) 小网格面积计算方法

图3 投影覆盖法

Fig.3 Projective covering method

因此，在 $\delta^{-1} \times \delta^{-1}$ 尺度下测量粗糙面的总面积为

$$A_T(\delta) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} A_i(\delta) \quad (5)$$

式中： $N(\delta)$ 为在 $\delta^{-1} \times \delta^{-1}$ 尺度下，覆盖粗糙结构面的网格总数。

3.2 结构面维数计算与分析

按照上述计算方法，以($\delta = 1/2^n$ ， $n=1, 2 \cdots 9$)为步长进行网格划分(因图 2 结构面尺寸为 1 025 像素×1 025 像素，所以 n 最大为 9，即最小网格尺寸为 2 像素×2 像素)，最后用最小二乘法拟合该结构面的分形维数，拟合过程数据见表 1，拟合结果见图 4。

在计算结构面分形维数过程中发现，在不同的尺度空间内结构面维数是不同的。如图 4 所示，该

结构面有 2 个明显的维数尺度空间，这两个尺度区间其分形维数差别很大。这一点与谢和平^[23]得出的结果是一致的，说明岩体结构面具有多重分形的特征。

表1 结构面分形维数计算过程数据表

Table 1 Data used to count fractal dimension of joint surface

序号	δ	$A_T(\delta)/A_{T0}$	$\ln(\delta)$	$\ln(A_T(\delta)/A_{T0})$
1	0.500 000	1.001 950	-0.693 147	0.001 948
2	0.250 000	1.009 912	-1.386 294	0.009 863
3	0.125 000	1.046 860	-2.079 442	0.045 795
4	0.062 500	1.145 071	-2.772 589	0.135 467
5	0.031 250	1.398 760	-3.465 736	0.335 586
6	0.015 625	1.858 158	-4.158 883	0.619 586
7	0.007 813	2.385 240	-4.852 030	0.869 300
8	0.003 906	2.847 404	-5.545 177	1.046 408
9	0.001 953	3.563 600	-6.238 325	1.270 771

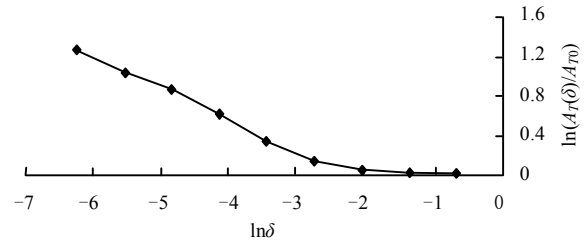


图4 结构面分形维数计算结果

Fig.4 Fractal dimension of joint surface

为了寻找不同粗糙程度结构面与其分形维数的定性关系，以图 2 结构面为基础，按一定比例对结构面起伏高度进行缩放，构造了 14 个粗糙程度不同的结构面，并相应地计算了各个构造结构面的分形维数，计算结果见表 2。

图 5 为不同粗糙面对应的分形维数变化趋势图。从图可以看出，随着结构面起伏高度的增大，不管是大尺度区间还是小尺度区间，分形维数都在增大。当把结构面起伏高度均缩小至原来高度的 1/100，即最大起伏差为 0.09 mm 时，结构面几乎接近平面，此时在大尺度度量区间内，分形维数为 2.000 008；在小尺度度量区间内，分形维数为 2.000 545。当把结构面起伏高度均放大 5 倍至最大起伏差为 45 mm 时，结构面此起彼伏，此时在大尺度度量区间内，分形维数为 2.207 745；在小尺度度量区间内，分形维数为 2.527 123。通过上述数据分析可知，分形维数能够很好地表征结构面的粗糙程度。

表 2 不同粗糙度结构面的维数结果对照表

Table 2 Comparison of fractal dimensions of different roughness joint surfaces

序号	最大起伏差/mm	缩放比例	大尺度度量空间特征				小尺度度量空间特征			
			尺度区间/mm	分维数 D_0	截距	相关系数	尺度区间/mm	分维数 D_0	截距	相关系数
1	0.09	0.01	3.125~25.000	2.000 008	-0.000 008	-0.905 503	0.098~3.125	2.000 545	-0.002 047	-0.926 405
2	0.90	0.10	3.125~25.000	2.000 770	-0.000 764	-0.905 718	0.098~3.125	2.038 534	-0.140 206	-0.959 060
3	1.80	0.20	6.250~25.000	2.001 357	-0.001 068	-0.934 892	0.098~6.250	2.083 508	-0.260 863	-0.964 747
4	2.70	0.30	6.250~25.000	2.003 041	-0.002 393	-0.935 081	0.098~6.250	2.133 146	-0.400 132	-0.980 885
5	3.60	0.40	6.250~25.000	2.005 376	-0.004 228	-0.935 342	0.098~6.250	2.176 340	-0.510 847	-0.989 581
6	4.50	0.50	6.250~25.000	2.008 342	-0.006 553	-0.935 671	0.098~6.250	2.213 334	-0.596 119	-0.994 324
7	5.40	0.60	6.250~25.000	2.011 913	-0.009 347	-0.936 065	0.098~6.250	2.244 803	-0.660 633	-0.996 841
8	6.30	0.70	6.250~25.000	2.016 060	-0.012 582	-0.936 520	0.098~6.250	2.271 704	-0.708 597	-0.998 048
9	7.20	0.80	6.250~25.000	2.020 751	-0.016 231	-0.937 030	0.098~6.250	2.294 821	-0.743 414	-0.998 464
10	8.10	0.90	6.250~25.000	2.025 952	-0.020 262	-0.937 592	0.098~6.250	2.314 803	-0.767 770	-0.998 397
11	9.00	1.00	6.250~25.000	2.031 629	-0.024 645	-0.938 199	0.098~6.250	2.332 178	-0.783 763	-0.998 034
12	18.00	2.00	12.500~25.000	2.043 458	-0.022 394	-1.000 000	0.098~12.50	2.427 918	-0.729 235	-0.994 700
13	27.00	3.00	12.500~25.000	2.090 738	-0.045 733	-1.000 000	0.098~12.50	2.481 141	-0.643 318	-0.991 318
14	36.00	4.00	12.500~25.000	2.147 196	-0.072 059	-1.000 000	0.098~12.50	2.509 873	-0.524 739	-0.988 641
15	45.00	5.00	12.500~25.000	2.207 745	-0.098 190	-1.000 000	0.098~12.50	2.527 123	-0.402 342	-0.986 749

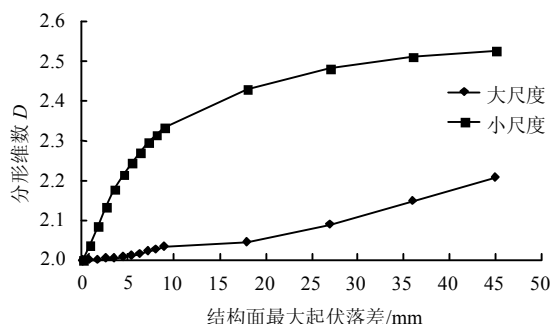


图 5 不同粗糙度结构面的维数变化趋势图

Fig.5 Variation of fractal dimension of different roughness joint surfaces

对于最大起伏落差为 45 mm 的构造结构面来说,虽然在计算维数过程中仅划分了 2 个尺度度量区间,但从图 6 数据点($\ln(\delta)$, $\ln(A_T(\delta)/A_{T0})$)的发展趋势看,有 3 个较明显的尺度度量区间。这一现象进一步说明:①岩体结构面具有多重分形的特征;②结构面越粗糙复杂,越具有多层次的尺度空间。

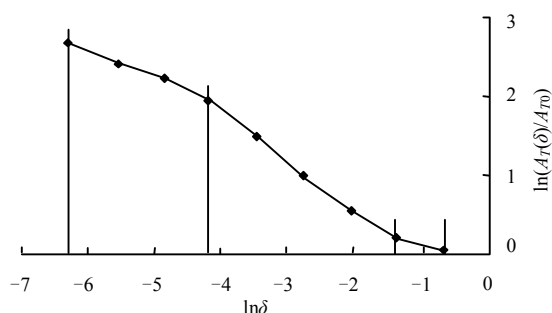


图 6 结构面粗糙度多重分形效应特征

Fig.6 Multifractal characteristics of roughness surface

4 结构面多重分形计算与分析

简单的分形维数对所研究的粗糙结构面只能做整体上的表征,无法体现出更全面、更精细的信息,多重分形可以弥补这一缺陷。

4.1 结构面多重分形计算方法

按照投影覆盖法^[23],定义结构面粗糙性概率为

$$p_i = \frac{A_i(\delta)}{A_T(\delta)} \quad (6)$$

式中: $A_i(\delta)$ 是尺度为 $\delta^{-1} \times \delta^{-1}$ 时第 i 个网格的面积; $A_T(\delta)$ 为结构面的总面积,即 $A_T(\delta) = \sum A_i(\delta)$ 。

把全部概率分布 $p_i(\delta)$ 组成的集划分为一系列子集,若 $p_j(\delta)$ 是其中一个子集,则 $p_j(\delta)$ 满足下式幂函数:

$$p_j(\delta) \propto \delta^\alpha \quad (7)$$

式中: α 为奇异指数,它反映了结构面分形体上各个不同概率层次奇异程度, α 的数值必然与其所在子集(同一概率层次的集合)有关。

若将子集内单元数 $N(\delta)$ 和 δ 的关系定义为

$$N(\delta) \propto \delta^{-f(a)} \quad (8)$$

$f(a)$ 是奇异指数为 α 的子集的分形维数,这样不同的 α 对应的 $f(a)$ 称为多重分形谱。

根据 Chhabra 等^[24] 提出的计算 $f(a)$ 的方法,在网格覆盖的基础上,建立统一参数测度 $u(q, \delta)$, 即

$$u(q, \delta) = \frac{[p_i(\delta)]^q}{\sum_i [p_i(\delta)]^q} \quad (9)$$

如果 $q > 1$ ，大概率集将起主要作用；当 $q < 1$ ，小概率集将起主要作用。通过加权，可以较全面地了解粗糙结构面的各级精细结构。

基于式 (9)，则该测度族子集合的 Hausdroff 维数为

$$f(a(q)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i u_i(q, \delta) \ln u_i(q, \delta)}{\ln \delta} \quad (10)$$

该测度下奇异性强度的平均值可由下式近似表示：

$$a(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i u_i(q, \delta) \ln p_i(\delta)}{\ln \delta} \quad (11)$$

因此，对于每给定一个 q 值，相应的 $a(q)$ 和 $f(a(q))$ 可由式 (9) ~ (11) 计算出来，这样可得到 $a(q) - f(a(q))$ 曲线。根据多重分形理论，具有 q 阶测度距的广义维数 D_q 可用式 (12)、(13) 表示。

$$D_q = \frac{1}{q-1} [qa(q) - f(a)] , \quad q \neq 1 \quad (12)$$

$$D_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \delta} , \quad q = 1 \quad (13)$$

4.2 计算过程与结果分析

按照上述方法，计算了图 2 结构面的多重分形特征参数。 $a(q) - f(a(q))$ 曲线及 $D(q) - q$ 曲线见图 7。两曲线发展趋势与谢和平等^[23]得到的结果是一致的。

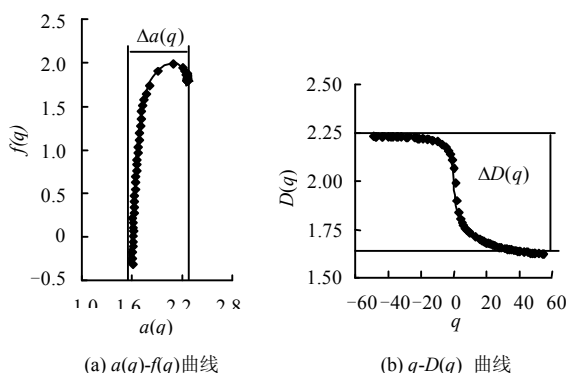


图 7 结构面多重分形计算结果

Fig.7 Multifractal characteristics of joint surfaces

由 $a(q) - f(a(q))$ 分形谱曲线可以看出，取不同的 q 值，结构面呈现不同的分形特征。 $D(q) - q$ 曲线表明：当 $q > 0$ 时， $D(q)$ 随 q 值的增大而逐步减小，此范围的 $D(q)$ 值是对结构面中宏观起伏结构的描

述；当 $q < 0$ 时， $D(q)$ 随 q 值绝对值的增大而逐步增大，此范围的 $D(q)$ 值是对结构面逐级精细微凸体的表征。

通过计算上述 15 个不同结构面的分形谱发现，不同的结构面，其分形谱特征明显不同。为了便于比较分析，这里用多重分形谱宽 $\Delta a(q)$ 或广义维数阈值宽度 $\Delta D(q)$ 表征结构面的粗糙度特征。谱宽可用式 (14) 表示，广义维数阈值宽度可用式 (15) 表示。

$$\Delta a(q) = a(q_{\max}) - a(q_{\min}) \quad (14)$$

$$\Delta D(q) = D(q_{\min}) - D(q_{\max}) \quad (15)$$

表 3 列出了上述 15 个结构面的多重分形特征参数。通过表 3 数据可以获得 $\Delta D(q)$ 、 $\Delta a(q)$ 随结构面起伏差增大的变化趋势图，如图 8 所示。

表 3 结构面多重分形特征参数值表

Table 3 Multifractal parameters of joint surfaces

最大起伏 差/mm	缩放 比例	q		$\Delta D(q)$	$\Delta a(q)$
		上限	下限		
0.09	0.01	59	-55	0.000 084	0.000 174
0.90	0.10	59	-55	0.126 134	0.166 087
1.80	0.20	58	-54	0.256 097	0.299 579
2.70	0.30	57	-53	0.343 251	0.387 526
3.60	0.40	56	-53	0.407 049	0.451 533
4.50	0.50	56	-52	0.457 121	0.501 306
5.40	0.60	55	-52	0.497 143	0.541 730
6.30	0.70	55	-51	0.531 033	0.575 483
7.20	0.80	54	-51	0.559 389	0.604 194
8.10	0.90	54	-51	0.584 601	0.629 121
9.00	1.00	54	-50	0.606 615	0.651 078
18.00	2.00	51	-48	0.738 948	0.783 862
27.00	3.00	50	-47	0.804 976	0.849 295
36.00	4.00	49	-46	0.845 371	0.890 375
45.00	5.00	48	-45	0.872 956	0.918 775

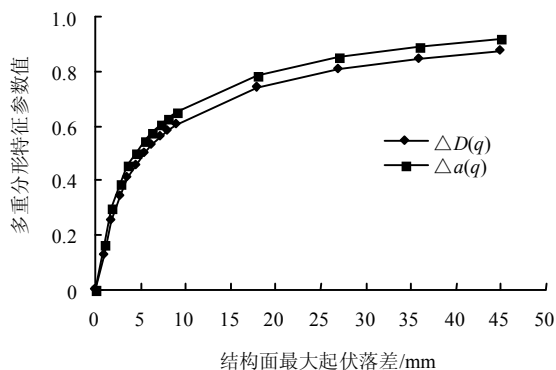


图 8 $\Delta a(q)$ 和 $\Delta D(q)$ 随结构面起伏差增大的变化趋势图

Fig.8 Variation of multifractal parameters ($\Delta a(q)$, $\Delta D(q)$) with waviness of joint surfaces

通过表 3 数据分析，结合图 8 多重分形参数

($\Delta a(q)$, $\Delta D(q)$)随结构面起伏差的变化趋势可以看出,结构面形貌越复杂,多重分形谱越宽,即 $\Delta a(q)$ 和 $\Delta D(q)$ 的值越大。在多重分形计算方法中已经明确了 a 的意义,即 a 为奇异指数,它反映的是分形体上各个不同概率层次奇异程度的一个量,且是因 q 而变的一个量;而 $D(q)$ 表示的是在给定 q 值下分形体的分形维数。因此, $\Delta a(q)$ 和 $\Delta D(q)$ 表示的是分形体的结构层次性,同时也表示结构面的复杂形态。如最大起伏差为0.09 mm的结构面,接近光滑平面,不难理解,该结构面形貌简单,层次结构亦简单;相应的 $\Delta a(q)$ 和 $\Delta D(q)$ 的值分别为0.000 174和0.000 084,几乎接近0,这一数值很好地反映了该结构面的形貌特征。相反,对于最大起伏差为45 mm的结构面(观测区域为50 mm×50 mm),该结构面跌宕起伏、形貌复杂;相应的 $\Delta a(q)$ 和 $\Delta D(q)$ 的值分别为0.918 775和0.872 956,这一数值恰好是该结构面复杂形貌的体现。

5 Barton 强度公式多重分形表达

通过上述研究,多重分形参数 $\Delta a(q)$ 或 $\Delta D(q)$ 可以量化表征结构面的形貌特征。若能够用参数 $\Delta a(q)$ 或 $\Delta D(q)$ 表征 JRC ,则可以克服Barton剪切强度公式中 JRC 估值的主观性缺陷。本节结合剪切试验数据,以Barton剪切强度公式为基础,建立多重分形参数 $\Delta a(q)$ 或 $\Delta D(q)$ 与 JRC 的关系。

5.1 剪切试验及结构面多重分形描述

用石膏材料制作试件,试件大小为50 mm×

50 mm×100 mm。在实验室进行直剪试验,如图9所示。

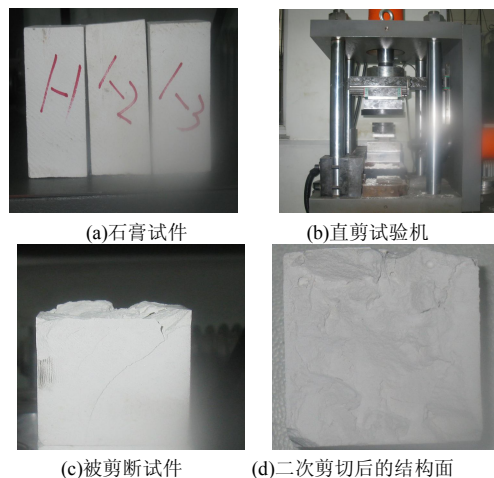


图9 直剪试验
Fig.9 Direct shear tests

由于石膏试件的强度较低,本次试验在石膏试件被剪断后仅进行一次结构面剪切试验。试验分为9组,每组3块试件。直剪试验过程中,在较小的正应力下,经二次剪切后,结构面的大凸体几乎全部被剪断,如图9(d)所示。从表4多重分形特征数据看,结构面剪切后,参数 $\Delta a(q)$ 、 $\Delta D(q)$ 明显降低,说明结构面由粗糙变得平缓,层次结构由复杂趋于简单。剪切前、后 $\Delta a(q)$ 、 $\Delta D(q)$ 的变化规律和试验结果比较吻合。

表4 石膏试件力学特性及其多重分形特征数据表
Table 4 Mechanical and multifractal characteristics of joint surfaces

编号	试件							结构面						
	正应力 /kPa	剪应力 /kPa	最大起伏 差/mm	剪断后结构面多重分形特征值				正应力 /kPa	峰值剪应 力/kPa	最大起伏 差/mm	经再次剪切后结构面多重分形特征值			
				q 上限	q 下限	$\Delta D(q)$	$\Delta a(q)$				q 上限	q 下限	$\Delta D(q)$	$\Delta a(q)$
1	80	940	14.6	-49	52	0.747 477	0.791 044	200	617	4.9	-55	59	0.473 622	0.509 654
2	120	1 056	13.5	-49	50	0.743 457	0.785 836	300	703	5.6	-55	59	0.493 256	0.532 689
3	160	1 144	12.7	-50	53	0.760 144	0.799 682	400	824	4.4	-55	59	0.406 936	0.445 041
4	240	1 196	11.3	-49	52	0.631 549	0.683 152	500	869	4.2	-55	59	0.415 243	0.458 216
5	320	1 220	9.8	-50	54	0.606 616	0.651 078	600	932	3.9	-55	59	0.495 176	0.531 985
6	400	1 298	7.2	-49	51	0.554 321	0.594 326	700	908	3.2	-55	59	0.394 219	0.445 237
7	480	1 340	5.9	-52	55	0.497 144	0.541 730	800	916	2.4	-55	59	0.383 603	0.419 815
8	520	1 406	4.8	-50	52	0.402 534	0.453 245	900	972	1.9	-55	59	0.321 567	0.372 156
9	560	1 484	3.4	-53	57	0.343 251	0.387 526	1 000	1 027	1.5	-55	59	0.262 997	0.301 089

5.2 由多重分形参数表征 Barton 剪切强度公式

5.2.1 多重分形参数表征 Barton 公式的提出

已有的结构面峰值抗剪强度公式中,Barton^[4]公式因其形式简单且能够反映不规则节理面的粗糙度,成为目前应用最为广泛的节理峰值抗剪强度公式,该公式的表达式为

$$\tau = \sigma_n \tan[JRC \lg(JCS/\sigma_n) + \phi_b] \quad (16)$$

式中: τ 为结构面抗剪切强度(MPa); σ_n 为作用于结构面上的法向应力(MPa); JRC 为结构面粗糙度系数; JCS 为结构面壁面抗压强度(MPa); ϕ_b 为结构面的基本摩擦角(°)。

该式中 JRC 虽反映的是结构面粗糙度参数,但

在实践中采用二维标准节理轮廓线进行人为估值, 存在主观性和片面性的缺点。本文参照Barton公式, 用 $\Delta a(q)$ 或 $\Delta D(q)$ 表示结构面的三维形态特征, 给出由多重分形参数表征Barton峰值剪切强度公式为

$$\tau = \sigma_n \tan[m\Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b] \quad (17)$$

$$\tau = \sigma_n \tan[n\Delta a(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b] \quad (18)$$

5.2.2 结构面参数 φ_b 和 JCS 的获取

结构面的基本摩擦角 φ_b 可取相同岩性平直结构面的摩擦角。选取5个较平整的石膏结构面做不同正应力下的剪切试验, 试验数据见表5。

表5 平直结构面剪切试验数据表

Table 5 Shear test data of flat joint surfaces

序号	正应力/kPa	峰值剪应力/kPa
1	200	248
2	400	372
3	600	584
4	800	716
5	1 000	816

通过分析不同正应力下, 平直结构面的剪应力, 按照摩尔-库仑准则, 可以计算出石膏结构面的黏聚力和基本摩擦角。拟合计算过程如图10所示。黏聚力为103.2 kPa; $\tan \varphi_b = 0.74$, 基本摩擦角 $\varphi_b = 36.5^\circ$; 其强度曲线为 $\tau = 103.2 + 0.74\sigma$ 。

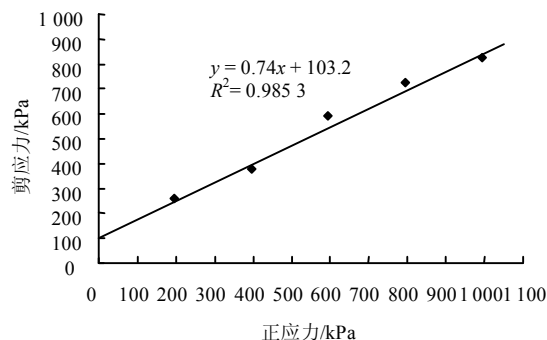


图10 平直石膏结构面剪切强度直线

Fig.10 Shear strength lines of flat joint surface

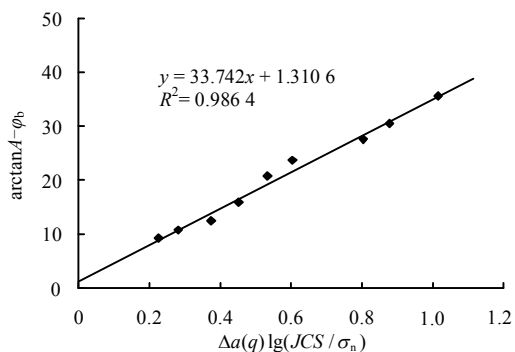
结构面未遭风化的情况下, 结构面壁面强度 JCS 可以用岩石试件通过单轴抗压强度试验进行测定^[4]。选取3个石膏试件, 进行单轴抗压强度试验。经计算, 石膏结构面壁面强度 $JCS=4\,540$ kPa。

5.2.3 JRC 与 $\Delta D(q)$ 及 JRC 与 $\Delta a(q)$ 关系的确定

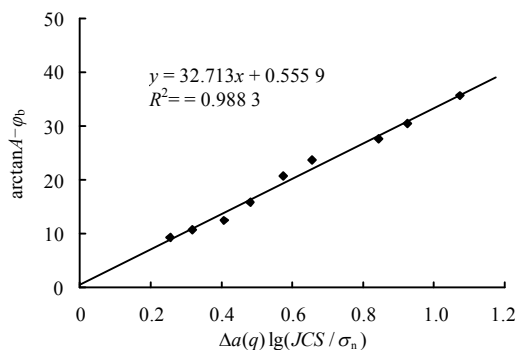
设 $\tan[m\Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b] = A$, 则 $m\Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b = \arctan A$, 所以 $m = \frac{\arctan A - \varphi_b}{\Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n)}$; $n = \frac{\arctan A - \varphi_b}{\Delta a(q)\lg(JCS/\sigma_n)}$ 。计算参

数 m 和 n 所需数据见表6。

通过分别拟合 $(\arctan A - \varphi_b, \Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n))$ 和 $(\arctan A - \varphi_b, \Delta a(q)\lg(JCS/\sigma_n))$ 数据点, 从而求解 m 和 n 这两个参数。拟合结果如图11所示, $m = 33.742$, $n = 32.713$ 。



(a) 参数 m 拟合结果图



(b) 参数 n 拟合结果图

图11 参数 m 和 n 拟合结果图

Fig.11 Fitting of parameters m and n

因此, 由多重分形参数表征的Barton峰值剪切强度可以用公式(19)或式(20)来表示。

$$\tau = \sigma_n \tan[33.742\Delta D(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b] \quad (19)$$

$$\tau = \sigma_n \tan[32.713\Delta a(q)\lg(JCS/\sigma_n) + \varphi_b] \quad (20)$$

由式(19)、(20)知, 三维结构面粗糙度系数 JRC 可表示为

$$JRC^{3D} = 33.742\Delta D(q) \quad (21)$$

$$JRC^{3D} = 32.713\Delta a(q) \quad (22)$$

6 结 论

通过对结构面多重分形特征及其剪切力学行为的研究, 得出如下结论:

(1) 采用投影覆盖法进行结构面的分维数计算, 结果表明, 结构面的形貌是多层次的, 具有多重分形的特征。

(2) 通过对构造结构面的多重分形计算分析,

表 6 确定 JRC 与 $\Delta D(q)$ 及 JRC 与 $\Delta a(q)$ 关系数据表
Table 6 Data used for determining relationships between JRC and $\Delta D(q)$ and between JRC and $\Delta a(q)$

$A = \frac{\tau}{\sigma_n}$	$\varphi_b / (^\circ)$	$\arctan A - \varphi_b / (^\circ)$	$\frac{JCS}{\sigma_n}$	$\Delta D(q)$	$\Delta D(q) \lg \frac{JCS}{\sigma_n}$	$\Delta a(q)$	$\Delta a(q) \lg \frac{JCS}{\sigma_n}$
3.09	36.5	35.54	22.70	0.747 477	1.01	0.791 044	1.07
2.34	36.5	30.39	15.13	0.743 457	0.88	0.785 836	0.93
2.06	36.5	27.61	11.35	0.760 144	0.80	0.799 682	0.84
1.74	36.5	23.59	9.08	0.631 549	0.61	0.683 152	0.65
1.55	36.5	20.73	7.57	0.606 616	0.53	0.651 078	0.57
1.30	36.5	15.87	6.49	0.554 321	0.45	0.594 326	0.48
1.15	36.5	12.37	5.68	0.497 144	0.37	0.541 730	0.41
1.08	36.5	10.70	5.04	0.402 534	0.28	0.453 245	0.32
1.03	36.5	9.26	4.54	0.343 251	0.23	0.387 526	0.25

结果表明: 结构面形态复杂, 分形谱参数 $a(q)$ 、 $D(q)$ 阈值较宽; 结构面形态简单, $a(q)$ 、 $D(q)$ 阈值较窄; 多重分形参数 $\Delta D(q)$ 和 $\Delta a(q)$ 能够很好地表示结构面复杂层次的形貌特征。

(3) 通过石膏试件剪切力学试验数据分析, 结合Barton节理峰值抗剪强度公式, 给出了 JRC 分别与多重分形参数 $\Delta D(q)$ 和 $\Delta a(q)$ 的线性关系。只要测算出 $\Delta D(q)$ 或 $\Delta a(q)$ 的值, 即可计算出 JRC 值, 重要的是该值是通过三维结构面粗糙度参数进行计算的结果, 克服了Barton剪切强度公式 JRC 估值的主观性及片面性的缺点。因此, 由多重分形参数表征的Barton剪切模型更具有实际应用价值。

参 考 文 献

- [1] PATTON F D. Multiple modes of shear failure in rock[C]//Proceedings of the First Congress of International Society of Rock Mechanics. Lisbon, Portugal: [s. n.], 1966: 509—513.
- [2] JAEGER J C. Friction of rocks and stability of rock slopes[J]. **Geotechnique**, 1971, 21(2): 91—134.
- [3] LADANYI B, ARCHAMBAULT G. Simulation of the shear behaviour of a jointed rock mass[C]//Proceedings of the 11th US Symposium on Rock Mechanics. Berkeley, California: AIME, 1969: 105—125.
- [4] BARTON N, CHOUBEY V. The shear strength of rock joints in theory and practice[J]. **Rock Mechanics**, 1977, 10(2): 1—54.
- [5] GRASSELLI G, EGGER P. Constitutive law for the shear strength of rock joints based on three-dimensional surface parameters[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2003, 40(1): 25—40.
- [6] XIA C C, TANG Z C, XIAO W M, et al. New peak shear strength criterion of rock joints based on quantified surface description[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2014, 47(2): 387—400.
- [7] TSE R, CRUDEN D M. Estimating joint roughness coefficients[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, 1979, 16(5): 303—307.
- [8] XIA C C, YUE Z Q, THAM L G, et al. Quantifying topography and closure deformation of rock joints[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2003, 40(2): 197—220.
- [9] EL-SOUDANI S M. Profilometric analysis of fractures[J]. **Metallography**, 1978, (11): 247—336.
- [10] MAERZ N H, FRANKLIN J A, BENNETT C P. Joint roughness measurement using shadow profilometry[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, 1990, 27(5): 329—343.
- [11] GRASSELLI G, WIRTHC J, EGGER P. Quantitative three-dimensional description of a rough surface and parameter evolution with shearing[J]. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 2002, 39(6): 789—800.
- [12] TATONE BSA, GRASSELLI G. A method to evaluate the three-dimensional roughness of fracture surfaces in brittle geomaterials[J]. **Review of Scientific Instruments**, 2009, 80: 1—10.
- [13] MANDELBROT B B. The fractal of nature[M]. New York: Freeman W H, 1983.